Recupero del 5/9/07 di An. Mat. II (primi cinque crediti) Ing. Elett. A.A.06/07

• Chi recupera solo la SECONDA PARTE di analisi II (primi 5 crediti) svolga gli esercizi 3)–4) ed ha 80 minuti di tempo. I voti sono in `macchina da scrivere`

• Chi recupera tutto il programma di analisi II (primi 5 crediti) svolga tutti gli esercizi ed ha 150 minuti di tempo. I voti sono quelli scritti in stile **grassetto**

• Chi recupera analisi II (10 CREDITI) svolga gli esercizi:
prima, seconda e quarta domanda dell'esercizio 1) del compito relativo ai secondi 5 crediti
prime otto domande dell'esercizio 3) del compito relativo ai secondi 5 crediti
esercizi 1) e 3) di questo compito. Si hanno 210 minuti di tempo. I voti sono *scritti in italico*

Si risponda alle domande di seguito al testo. Lo svolgimento per esteso dei calcoli (sempre in bella) va allegato al compito.

1) (**7.5**) (*7*) Si considerino le superfici cartesiane S_1 e S_2 di equazione rispettivamente $z = 4 - \frac{1}{2}x^2 - 2y^2$ e $z = 1 + x^2 + y^2$. Si calcoli il valore di quella porzione di volume compresa fra le due superfici e la cui proiezione sul piano (x, y) verifica le condizioni $y \geq 0$, $8x^2 + 16y^2 \geq 1$, $4x^2 + 8y^2 \leq 1$.

• Si scriva qui di seguito l'integrale che rappresenta il calcolo del volume

Si parametrizzano le due ellissi $x_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} r\cos t$, $y_1 = \dfrac{1}{4} r\cos t$, e $x_2 = \dfrac{1}{2} r\cos t$, $y_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} r\cos t$,

Il volume cercato è $\displaystyle\int\int_{4x^2+8y^2\leq 1} \int_{1+x^2+y^2}^{4-\frac{1}{2}x^2-2y^2} dz - \int\int_{8x^2+16y^2\leq 1} \int_{1+x^2+y^2}^{4-\frac{1}{2}x^2-2y^2} dz =$

$$= \int_0^\pi dt \int_0^1 \frac{rdr}{4\sqrt{2}}\Big(3 - \frac{3}{8}r^2\cos^2 t - \frac{3}{8}r^2\sin^2 t\Big) - \int_0^\pi dt \int_0^1 \frac{rdr}{8\sqrt{2}}\Big(3 - \frac{3}{16}r^2\cos^2 t - \frac{3}{16}r^2\sin^2 t\Big) = \frac{87}{1024}\sqrt{2}\pi$$

• Si scriva il valore numerico del risultato $\dfrac{87}{1024}\sqrt{2}\pi$

2) (**7.5**) Si considerino la superficie S_1 e la curva **chiusa** C, giacente su S_1, la cui proiezione sul piano (x, y) ha il sostegno definito da: 1) $8x^2 + 16y^2 = 1$, $4x^2 + 8y^2 = 1$ se $y > 0$ 2) se $y = 0$ il sostegno è dato dai due segmenti congiungenti i punti di contatto delle due ellissi con l'asse delle ascisse.

La curva è percorsa in modo che la sua proiezione sul piano (x, y) è percorsa in senso antiorario.

Si calcoli la circuitazione lungo C della forma differenziale $\omega = -ydx + x(dy + dz)$

Risposta Come prima cosa bisogna avere bene in mente come è fatta la proiezione sul piano (x, y) della curva chiusa C. Poi conviene spezzare la forma differenziale nella somma $\omega = (xdy - ydx) + xdz \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1 + \omega_2$ ed osservare che ω_1 non contiene la z e quindi l'integrale curvilineo dipende solo dalla proiezione della curva sul piano (x, y). Inoltre $\displaystyle\int_C \omega_1$ è pari a 2 volte l'area della proiezione sul piano (x, y) della curva chiusa C ossia $\displaystyle\int_C \omega_1 = \pi\Big(\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{8\sqrt{2}}\Big) = \pi\frac{1}{8\sqrt{2}}$

Ora non resta che calcolare $\displaystyle\int_C xdz$. Bisogna eseguire le seguenti parametrizzazioni:

$\gamma_1 : (x_1 = t, y_1 = 0, z_1 = 4 - \frac{1}{2}t^2)$ $\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq t \leq \frac{1}{2}$ $\gamma_2 : (x_2 = \frac{1}{2}\cos t, y_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin t, z_2 = 4 - \frac{1}{8}\cos^2 t - \frac{1}{4}\sin^2 t)$ $0 \leq t \leq \pi$ $\gamma_3 : (x_3 = t, y_3 = 0, z_3 = 4 - \frac{1}{2}t^2)$ $-\frac{1}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2\sqrt{2}}$
$\gamma_4 : (x_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos t, y_4 = -\frac{1}{4}\sin t, z_4 = 4 - \frac{1}{16}\cos^2 t - \frac{1}{8}\sin^2 t)$ $-\pi \leq t \leq 0$
$\sum_{k=1}^{4}\int_{\gamma_k} xdz = \frac{1}{24}(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}})$. Il risultato finale è $\frac{1}{24}(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}) + \pi\frac{1}{4\sqrt{2}}$.

3) (**7.5**) (15) (7) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin x + \sin(2x) \quad 0 < x < \pi \\ u(x,0) = \sin 2x, \quad u_t(x,0) = \sin x, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Si scriva qui di seguito la soluzione. Sui fogli allegati si riporti lo svolgimento.

Risposta La formula risolutiva è $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin kx(u_k'' + a^2k^2u_k) = \sin x + \sin(2x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)\sin kx$ dove $f_k(t) = 0$ se $k \neq 1,2$ e $f_k(t) = 1$ se $k = 1,2$. Se $k \neq 1,2$ la soluzione è $u_k(t) = A_k \cos akt + B_k \sin akt$ mentre se $k = 1$ la soluzione è $u_1(t) = A_1 \cos at + B_1 \sin at + \frac{1}{a^2}$ e $u_2(t) = A_2 \cos 2at + B_2 \sin 2at + \frac{1}{4a^2}$ se $k = 2$. La soluzione è quindi $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\sin kx$ dove le $u_k(t)$ sono quelle date. Per le condizioni inziali abbiamo $u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(0)\sin kx = (A_1 + \frac{1}{a^2})\sin x + (A_2 + \frac{1}{4a^2})\sin(2x) + \sum_{k=3}^{+\infty} \sin kxA_k$ e questa espressione deve essere uguale alla funzione $\sin 2x$. L'unica possibilità è che $A_1 = -\frac{1}{a^2}$ e $A_2 = 1 - \frac{1}{4a^2}$. Tutti gli altri A_k valgono zero. Sui B_k la condizione imposta da $u_t(x,0)$ è $B_1 = \frac{1}{a}$. Tutti gli altri valgono zero. Alla fine la soluzione è $u(x,t) = \frac{4a^2-1}{4a^2}\sin 2x\cos 2at + \frac{1}{4a^2}\sin 2x - \frac{1}{a^2}\sin x\cos(at) + \frac{1}{a}\sin x\sin(at) + \frac{1}{a^2}\sin x$.

4) (**7.5**) (15) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \cos x \quad 0 < x < \pi \\ u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = \sin x, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Si scriva qui di seguito la soluzione. Sui fogli allegati si riporti lo svolgimento.

Risposta Si prolunga in modo dispari la funzione $\cos x$ a $-\pi < x < 0$ dimodoché i coefficienti di Fourier c_k della funzione $\cos x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin kx$ sono dati da $c_1 = 0$, $c_k = \dfrac{2k(1+(-)^k)}{\pi(k^2-1)}$ se $k \neq 1$.

Ne segue che dalla formula $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin kx (u_k'' + a^2k^2u_k) = \cos x$ si ha $u_k'' + a^2k^2u_k = 0$ se k è dispari, $u_k'' + a^2k^2u_k = \dfrac{4k}{\pi(k^2-1)}$ se k è pari. La soluzione è $u_k(t) = A_k \cos(akt) + B_k \sin(akt) + C_k$ dove $C_k = \dfrac{4}{a^2k\pi(k^2-1)}$ se k è pari. A questo punto bisogna soddisfare le condizioni iniziali. $u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(0)\sin(kx) = \sin x$ da cui $u_1(0) = 1$, e $u_k(0) = 0$ per ogni k diverso da 1. $u_1(0) = 1$ dà $A_1 = 1$ ossia $A_1 = 1$. $u_k(0) = 0$ dà $A_k = -C_k$. Per quanto riguarda $u_t(x,0) = \sin x$ abbiamo $\sum_{k=1}^{+\infty} akB_k \sin(kx) = \sin x$ ossia $B_k = 0$ per ogni $k \neq 1$ e $B_1 = \dfrac{1}{a}$.

Alla fine la soluzione è

$$u(x,t) = \sin x \cos(at) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{a^2k\pi(-4k^2+1)} \cos(2kat)\sin(2kx) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{a^2k\pi(4k^2-1)} \sin(2kx) + \frac{1}{a}\sin(at)\sin x$$